ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΝΟΤΗΤΑ: ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ & ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ - ΠΡΟΟΔΟΙ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΜΑΡΤΙΟΣ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ΩΡΕΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \ (1)$ με $\alpha \neq 0$, να αποδείξετε ότι: $S = -\frac{\beta}{\alpha}$ και $P = \frac{\gamma}{\alpha}$

Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η (1) ισοδύναμα γράφεται στη μορφή :

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Μονάδες: 8

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι Σωστές ή με (Λ), αν είναι Λανθασμένες:

1) Αν η διακρίνουσα του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, με $\alpha \neq 0$, είναι αρνητική, τότε το τριώνυμο είναι αρνητικό.

2) Σε μια γεωμετρική πρόοδο ισχύει: $\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1}$

3) Η εξίσωση $|x| = \alpha$ έχει για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ λύσεις τους αριθμούς $x = \alpha$ και $x = -\alpha$

4) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, τότε ισχύει :

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = (x - x_1)(x - x_2)$$

5) Ο γεωμετρικός μέσος των αριθμών -4 και -16 είναι ο αριθμός 8

6) Αν α, β, γ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε ισχύει: $\beta^2 = \alpha + \gamma$

7) Η ανίσωση $(x - \alpha)^2 \leq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ έχει μοναδική λύση την $x = \alpha$

Μονάδες: 7

Α3. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

1) Αν σε μία γεωμετρική πρόοδο είναι $\alpha_1 = 5$ και $\lambda = 2$, τότε ο α_5 είναι:

Α. -25 **Β.** 10 **Γ.** 80 **Δ.** 120

2) Ο αριθμός 6 είναι γεωμετρικός μέσος των αριθμών:

Α. 3 και 12 **Β.** -2 και -3 **Γ.** 5 και 7 **Δ.** 4 και 8

3) Η διαφορά ω της αριθμητικής προόδου: $\alpha + \beta$, α , $\alpha - \beta$, … είναι:

Α. α **Β.** β **Γ.** -α **Δ.** -β

4) Ο αριθμός 15 είναι αριθμητικός μέσος των αριθμών:

Α. 5 και 20 **Β.** 9 και 21 **Γ.** -5 και -25 **Δ.** -9 και -21

5) Αν (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω, τότε $\alpha_{\nu+2} - \alpha_\nu$ είναι:

Α. ω **Β.** -ω **Γ.** -2ω **Δ.** 2ω

Μονάδες: 10

ΘΕΜΑ Β

Β1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $x^2 - x - 6 = 0$
ii. $(x-1)^2 - |x-1| - 6 = 0$

Μονάδες: 7

Β2. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $2x^2 - 3x - 2 \leq (x-1)^2 - 1 \leq 3$
ii. $3 < |x+1| \leq 7$

Μονάδες: 8

Β3. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν), για την οποία ισχύει ότι:

$$\alpha_1 = 19 \quad \text{και} \quad \alpha_{10} - \alpha_6 = 24$$

i. Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 6$
ii. Να βρείτε τον α_{20}
iii. Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου

Μονάδες: 10

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (2\lambda - 1)x - \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$

i. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει πραγματικές και άνισες ρίζες x_1, x_2
ii. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:
$$x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2 + 2 \leq 0$$
iii. Για $\lambda = 1$, να βρείτε την εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς: $\rho_1 = \frac{2}{x_1^2 x_2}$ και $\rho_2 = \frac{2}{x_1 x_2^2}$

Μονάδες: 15

Γ2. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R} - \{-2\}$ για τις οποίες η ανίσωση:

$$(\lambda + 2)\,x^2 - 2\lambda x + 3\lambda < 0 \quad \text{αληθεύει για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες: 10

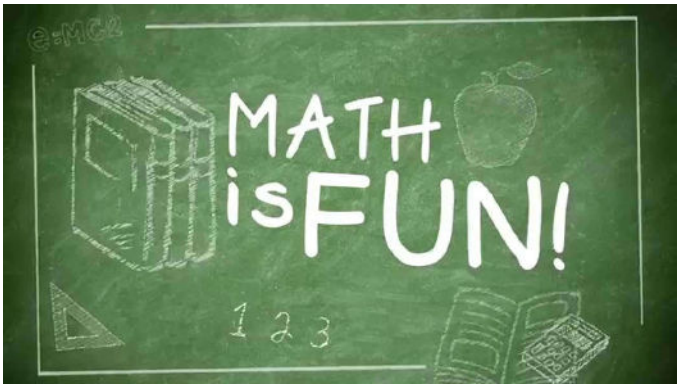
ΘΕΜΑ Δ

Ένα κλειστό στάδιο έχει 25 σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά έχει 12 καθίσματα και καθεμιά από τις επόμενες σειρές έχει δύο καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη.

Δ1. Να βρείτε πόσα καθίσματα έχει η μεσαία σειρά και πόσα η τελευταία σειρά.

Δ2. Να υπολογίσετε τη χωρητικότητα του σταδίου.

Δ3. Οι μαθητές ενός Λυκείου προκειμένου να παρακολουθήσουν μια εκδήλωση, κατέλαβαν όλα τα καθίσματα από την $7^η$ μέχρι και την $14^η$ σειρά. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Λυκείου.

Μονάδες: 25

ΚΑΛΗ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ !!!