ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ' ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΘΕΤΙΚΩΝ & ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤ/ΝΣΗΣ
ΕΝΟΤΗΤΕΣ: 2.1-2.7 & 3.1 , 3.4, 3.5
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: 3

ΘΕΜΑ Α *(μονάδες 25)*

Α1. Έστω συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ.

Μονάδες: 7

Α2. «Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β), τότε ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$»
Να χαρακτηρίσετε την πρόταση με (Σ), αν είναι Σωστή ή με (Λ) , αν είναι Λανθασμένη. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με ένα παράδειγμα.

Μονάδες: (1+2)

Α3.

i. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Fermat

ii. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$;

Μονάδες: 5

Α4. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις με **(Σ)**, αν είναι Σωστή ή με **(Λ),** αν είναι λανθασμένη.

1) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν συνεχείς παραγώγους στο $[\alpha, \beta]$, τότε ισχύει: $\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x) = f(x)g(x) - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx$

2) Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο

3) Αν το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της f και η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε $f'(x_0) = 0$

4) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $(\alpha^x)' = x\,\alpha^{x-1}$, όπου $\alpha > 0$

5) Αν $f'(x) = 0$ για κάθε x που ανήκει σε ένα σύνολο Δ , τότε η f είναι σταθερή για κάθε x που ανήκει στο Δ

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β *(μονάδες 25)*

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$f(x)=\begin{cases}\alpha\, e^{x-1}+x-1\,, & x\le 1\\ -x^2+\beta x-2\alpha, & x>1\end{cases}$$

Β1. Να αποδείξετε ότι: $\alpha=1$ και $\beta=4$

Μονάδες: 7

Β2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα

Μονάδες: 6

Β3. Να βρείτε εφαπτομένη της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία

$$y=-2x$$

Μονάδες: 6

Β4. Να βρείτε το ολοκλήρωμα $I=\int_0^1 x^2 f(x)\,dx$

Μονάδες: 6

ΘΕΜΑ Γ *(μονάδες 25)*

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{\ln^2 x}{x}$$

Γ1. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f.

Μονάδες: 7

Γ2. Να αποδείξετε ότι: $\int_1^e f(x)dx=\frac{1}{3}$

Μονάδες: 5

Γ3. Να αποδείξετε ότι οι μοναδικές εφαπτομένες της C_f που διέρχονται από την αρχή των αξόνων είναι οι ευθείες $y=0$ και $y=\frac{1}{e^2}x$

Μονάδες: 7

Γ4. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_1^{10}\frac{xf(x)}{\sqrt{4x^2+5}}dx<\frac{3}{e^2}(3\sqrt{5}-1)$$

Μονάδες: 7

ΘΕΜΑ Δ *(μονάδες 25)*

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,\ +\infty)\ \to \mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και για την οποία ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-x+1-e}{x-1}=-1$ και
- $f\ (x)\neq 0$ για κάθε $x>0$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f\ (1)=e$ και $f\ '(1)=0$

Μονάδες: 6

Δ2. Αν επιπλέον ισχύει $x^2 f\ '(x)=(x-1)f(x)$ για κάθε $x>0$ τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$ για κάθε $x>0$

Μονάδες: 7

β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες: 6

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\dfrac{f(x)}{x^4}dx=e^2$

Μονάδες: 6

ΚΑΛΗ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ !!!