ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ' ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΘΕΤΙΚΩΝ & ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤ/ΝΣΗΣ
ΕΝΟΤΗΤΕΣ: 2.1-2.10 (ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ)
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: 3

ΘΕΜΑ Α *(μονάδες 25)*

Α1. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_o , να αποδείξετε ότι είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες: 7

Α2. «Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή και δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε ισχύει $f''(x) > 0 \ \ για\ κάθε\ x\ \epsilon\ \mathbb{R}$»
Να χαρακτηρίσετε την προηγούμενη πρόταση με (Σ) , αν είναι Σωστή ή με (Λ), αν είναι Λανθασμένη. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με ένα παράδειγμα.

Μονάδες: (2+2)

Α3. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Μονάδες: 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις με **(Σ)**, αν είναι Σωστή ή με **(Λ),** αν είναι Λανθασμένη.

1) Για κάθε $x < 0 \ \ ισχύει \ \ (\ln(-x))' = \frac{1}{x}$

2) Ισχύει: $(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f(x)g'(x) - f'(x)g(x)}{(g(x))^2}$

3) Αν το σημείο $A(x_0\ , f(x_0)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f , τότε είναι: $f''(x_0) = 0$

4) Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη στα διαστήματα $(a, x_0) \ \ και\ (x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , τότε η f είναι κοίλη στο $(a,\ \beta)$

5) Αν ισχύει $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 2) = 5$, $τότε\ η\ ευθεία\ \ y = 7$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Μονάδες: 10

ΘΕΜΑ Β *(μονάδες 25)*

Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2} \ , x \in \mathbb{R}^*$$

Β1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τοπικά ακρότατα

Μονάδες: 7

Β2. Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στα διαστήματα $(-\infty\,, 0)$ και $(0, +\infty)$, να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(1\,, f(1))$ και να αποδείξετε ότι:

$$f(x) + 7x \geq 9 \quad \text{για κάθε } x > 0$$

Μονάδες: 6

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f

Μονάδες: 6

Β4. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες.

Μονάδες: (4+2)

ΘΕΜΑ Γ *(μονάδες 25)*

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} e^x + x + \alpha \ , & x \leq 0 \\ -x^2 + \alpha x + \beta, & x > 0 \end{cases}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = 3$

Μονάδες: 6

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τοπικά ακρότατα

Μονάδες: 6

Γ3. Να αποδείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών $(-\infty\,, 4]$ και ότι το σημείο $A(0\,, f(0))$ είναι σημείο καμπής της C_f

Μονάδες: 6

Γ4. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(2\, e^{x^2-1} - 1\right) + f\left(x^2 + x + 1\right) = 8$$

Μονάδες: 7

ΘΕΜΑ Δ *(μονάδες 25)*

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)$ για την οποία ισχύουν:

- $f'(1)=\frac{1}{2}$ και
- $(xy+1)f(xy)=y(x+1)f(x)+x(y+1)f(y)$ για $x,y>0$

Δ1. Να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$x^2 f'(x)+x f'(x)=x+f(x) \text{ για κάθε } x>0$$

Μονάδες: 7

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x)+\frac{f(x)}{x}-\ln x$$

είναι σταθερή για κάθε $x\in(0,+\infty)$

Μονάδες: 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=\frac{x\ln x}{x+1} \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty)$$

Μονάδες: 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(\frac{1}{e^2},1)$ στο οποίο η f παρουσιάζει ελάχιστο και η ελάχιστη τιμή είναι $f(x_0)=-x_0$

Μονάδες: 7

ΚΑΛΗ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ !!!