ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ' ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΘΕΤΙΚΩΝ & ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: 3

ΘΕΜΑ Α *(μονάδες 25)*

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 6

Α2.

i. Πότε ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

ii. Πότε μια συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

iii. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του

Μονάδες (3+3+4)

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή και δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ, τότε ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$ »

i. Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό ως Αληθή (Α) ή Ψευδή (Ψ)

ii. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

Μονάδες (1+3)

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με **(Σ)**, αν είναι Σωστές ή με **(Λ),** αν είναι λανθασμένες.

1. Αν η συνάρτηση f είναι κοίλη σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω από τη C_f
2. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)=f(\beta)$, τότε υπάρχει εφαπτομένη της C_f παράλληλη στον άξονα x'x
3. Αν μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει:
   $f^{-1}(f(x)) = x, x \in A$ και $f(f^{-1}(y)) = y, y \in f(A)$
4. Αν $f(x) \leq g(x)$ για κάθε x κοντά στο x_0, τότε ισχύει:
   $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
5. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης f είναι ολικό μέγιστο της f

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Β *(μονάδες 25)*

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^3+3x+1}{x^2}$

Β1. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της f

Μονάδες 6

Β2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη ή κυρτή και να προσδιορίσετε το σημείο καμπής της C_f

Μονάδες 6

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f

Μονάδες 6

Β4. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ *(μονάδες 25)*

Δίνεται συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3x}{x-2}=1 \quad \text{και} \quad f(4)=6$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(2)=6$

Μονάδες 5

Γ2. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο A(2, f(2))

Μονάδες 6

Γ3. Να δείξετε ότι η ευθεία $y=x+3$ τέμνει τη C_f σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (2,4)$

Μονάδες 6

Γ4. Αν η f είναι κοίλη, να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (2,4)$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ *(μονάδες 25)*

Δίνεται συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και για την οποία ισχύουν:

- $f(1)=2$
- $f(x)\geq x^2-2x+3$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$
- $e^y f'(x)-2xe^y-e^y=f'\left(\frac{x}{e^y}\right)-\frac{2x}{e^y}-1$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, $y\in\mathbb{R}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι: $f'(1)=0$

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=x^2+x-3\ln x$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$4f(x)=\frac{4}{3}x^3+2x^2-e^{2x-1}$$

έχει το πολύ δύο ρίζες

Μονάδες 7

Δ4. Να αποδείξετε ότι:

$$x\,f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)\geq 2(x+1) \text{ για κάθε } x\in[1,+\infty)$$

Μονάδες 7

ΚΑΛΗ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ !!!