

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΘΕΤΙΚΩΝ & ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΜΑΡΤΙΟΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: 3

ΘΕΜΑ Α (μονάδες 25)

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Μονάδες 6**A2.**

- i. Πότε ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;
- ii. Πότε μια συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;
- iii. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του

Μονάδες (3+3+4)**A3.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή και δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ , τότε ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$ »

- i. Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό ως Αληθή (Α) ή Ψευδή (Ψ)
- ii. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

Μονάδες (1+3)

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με **(Σ)**, αν είναι Σωστές ή με **(Λ)**, αν είναι λανθασμένες.

1. Αν η συνάρτηση f είναι κοίλη σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω από τη C_f
2. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha)=f(\beta)$, τότε υπάρχει εφαπτομένη της C_f παράλληλη στον άξονα x'
3. Αν μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει:
 $f^{-1}(f(x)) = x, x \in A$ και $f(f^{-1}(y)) = y, y \in f(A)$
4. Αν $f(x) \leq g(x)$ για κάθε x κοντά στο x_0 , τότε ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$
5. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης f είναι ολικό μέγιστο της f

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Β (μονάδες 25)

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \frac{x^3 + 3x + 1}{x^2}$$

B1. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της f

Μονάδες 6

B2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη ή κυρτή και να προσδιορίσετε το σημείο καμπής της C_f

Μονάδες 6

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f

Μονάδες 6

B4. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ (μονάδες 25)

Δίνεται συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3x}{x - 2} = 1 \quad \text{και} \quad f(4) = 6$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(2) = 6$

Μονάδες 5

Γ2. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(2, f(2))$

Μονάδες 6

Γ3. Να δείξετε ότι η ευθεία $y = x + 3$ τέμνει τη C_f σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (2, 4)$

Μονάδες 6

Γ4. Αν η f είναι κοίλη, να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (2, 4)$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ (μονάδες 25)

Δίνεται συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και για την οποία ισχύουν:

- $f(1) = 2$
- $f(x) \geq x^2 - 2x + 3$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$
- $e^y f'(x) - 2xe^y - e^y = f'\left(\frac{x}{e^y}\right) - \frac{2x}{e^y} - 1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, $y \in \mathbb{R}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι: $f'(1) = 0$

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = x^2 + x - 3 \ln x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$4f(x) = \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 - e^{2x-1}$$

έχει το πολύ δύο ρίζες

Μονάδες 7

Δ4. Να αποδείξετε ότι:

$$x f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) \geq 2(x+1) \text{ για κάθε } x \in [1, +\infty)$$

Μονάδες 7

ΚΑΛΗ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ !!!

