ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΝΟΤΗΤΑ: ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ-ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ΩΡΕΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν χ_1, χ_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0\ (\mathbf{1})\ \ \mu\varepsilon\ \alpha \neq 0$, να αποδείξετε ότι: $S = -\frac{\beta}{\alpha}\ \ \kappa\alpha\iota\ \ P = \frac{\gamma}{\alpha}$

Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η $(\mathbf{1})$ ισοδύναμα γράφεται στη μορφή :

$$\chi^2 - S\chi + P = 0$$

Μονάδες: 8

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι Σωστές ή με (Λ), αν είναι Λανθασμένες:

1) Η εξίσωση $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0\ \mu\varepsilon\ \alpha \neq 0$, αν έχει Διακρίνουσα $\Delta \geq 0$, τότε έχει μία τουλάχιστον ρίζα
2) Αν χ_1, χ_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$, τότε ισχύει :
$$\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = (\chi - \chi_1)(\chi - \chi_2)$$
3) Αν χ_1, χ_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$, τότε για κάθε τιμή του χ που βρίσκεται μεταξύ των ριζών το τριώνυμο γίνεται αρνητικό.
4) Το τριώνυμο $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0\ \mu\varepsilon\ \alpha \neq 0$ που έχει αρνητική διακρίνουσα παίρνει τιμές ομόσημες του α για οποιαδήποτε τιμή του χ
5) Η εξίσωση $\alpha\chi^2 - \chi - \alpha = 0 \mu\varepsilon\ \alpha \neq 0$ έχει πραγματικές και άνισες ρίζες για κάθε $\chi\ \epsilon\ \mathbb{R}$
6) Αν η εξίσωση $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$, έχει $\Delta > 0\ \kappa\alpha\iota\ \gamma = \alpha \neq 0$, τότε οι ρίζες της είναι αντίστροφες
7) Η εξίσωση $|\chi| = \alpha\ \ \acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \alpha\epsilon\mathbb{R}$ λύσεις τους αριθμούς
$$\chi = \alpha\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \chi = -\alpha$$
8) Αν η εξίσωση $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0\ \mu\varepsilon\ \alpha \neq 0$ έχει δύο ρίζες αντίθετες και μη μηδενικές, τότε $\beta = 0\ \ \ \kappa\alpha\iota\ \ \ \alpha\gamma < 0$
9) Η εξίσωση $(|\chi| - 1)(|\chi| - 2) = 0$ έχει 2 πραγματικές ρίζες
10) Η εξίσωση $|\chi| = -\chi$ είναι αδύνατη

Μονάδες: 5

Α3. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις και ανισώσεις:

1) $\chi^2 = 3\chi$
2) $\chi^2 + 4 = 0$
3) $\chi^3 + 1 = 0$
4) $\chi^2 = 5$
5) $\chi^2 \geq -7$
6) $\chi^2 > 0$

Μονάδες: 12

ΘΕΜΑ Β

Β1. Να απλοποιήσετε το κλάσμα:

$$\frac{\chi^2 - \alpha\chi + \beta\chi - \alpha\beta}{2\chi^2 - 3\alpha\chi + \alpha^2}$$

Μονάδες: 4

Β2. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $1 \leq \chi^2 - \chi - 1 < 5$

ii. $\frac{(2\chi^3 - 5\chi^2 - 7\chi)(3\chi^2 - 2\chi + 1)}{\chi^2 - 1} \leq 0$

Μονάδες: 8

Β3. Δίνεται το τριώνυμο: $2\chi^2 + 5\chi - 1$

i. Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες

ii. Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

$$A = \chi_1 + \chi_2 \ , \ B = \chi_1\chi_2 \ , \Gamma = {\chi_1}^2 + {\chi_2}^2$$

iii. Να προσδιορίσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς:

$$\rho_1 = \frac{1}{\chi_1} \quad \kappa\alpha\iota \quad \rho_2 = \frac{1}{\chi_2}$$

Μονάδες: (3+4+6)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Δίνεται η εξίσωση: $\chi^2 - 6\chi + |3\lambda - 2| = 0$

i. Για ποιες τιμές του $\lambda \epsilon \mathbb{R}$ το τριώνυμο έχει πραγματικές λύσεις;

ii. Να λυθεί η ανίσωση:
$(\chi_1\chi_2 - 5)(\chi_1 + \chi_2 - \lambda^2 + 5\lambda) \geq 0$, όπου χ_1, χ_2 οι ρίζες της αρχικής εξίσωσης

Μονάδες: (6+9)

Γ2. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \epsilon \mathbb{R} - \{1\}$ για τις οποίες ισχύει:

$$(\lambda - 1)\chi^2 + 2\lambda\chi + \lambda + 2 > 0 \ \gamma\iota\alpha \ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \ \chi \ \epsilon \ \mathbb{R}$$

Μονάδες: 10

ΘΕΜΑ Δ

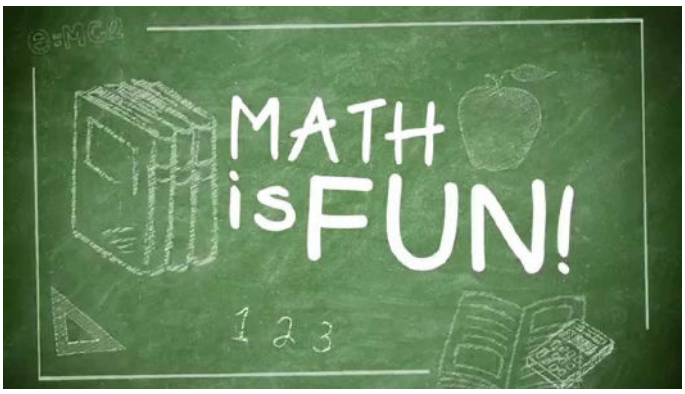
Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda+2)\chi^2-2\lambda\chi+\lambda-2=0 \ \ \mu\varepsilon \ \lambda\neq-2$

Δ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε τιμή του λ

Δ2. Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε η εξίσωση να έχει ρίζα τον αριθμό 2. Ποια είναι η άλλη ρίζα;

Δ3. Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει ρίζες ετερόσημες;

Δ4. Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει ρίζες θετικές;

Μονάδες: (4+6+7+8)

ΚΑΛΗ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ!!